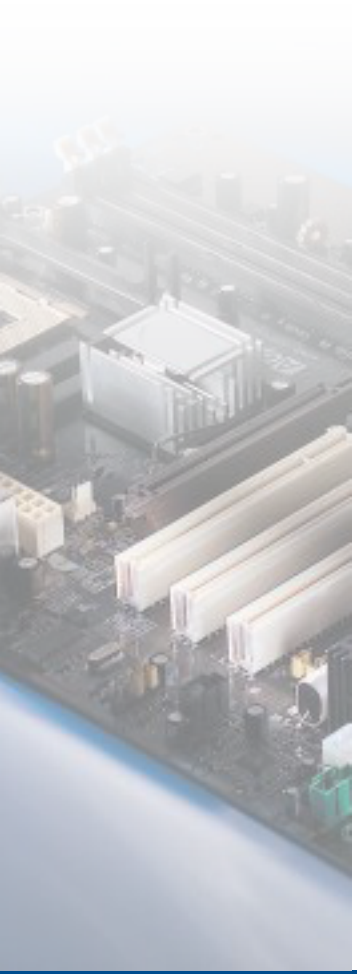


Kapitel 8: Zweistufige Logiksynthese

PLAs und zweistufige Logiksynthese

Implikanten und Primimplikanten

Algorithmus zur Berechnung eines Minimalpolynoms

Lernziele

- Definition von Implikanten und Primimplikanten kennen und verstehen
- Implikanten und Primimplikanten an n-dimensionalen Würfeln identifizieren können
- Definition des Minimalpolynoms kennen und verstehen
- Zusammenhänge zwischen Mintermen, Implikanten, Primimplikanten und Minimalpolynomen kennen und verstehen
- Quine‘s Primimplikantensatz kennen, verstehen und anwenden können

Implikanten und Primimplikanten

Definition (Implikant):
Sei $f \in \mathcal{B}_{n,1}$ eine boolesche Funktion. Ein Monom q mit $\psi(q) \leq f$ heißt Implikant von f.

Veranschaulichung durch n-dimensionalen Würfel:
Ein Implikant von f ist ein Teilwürfel, der nur markierte Knoten enthält.

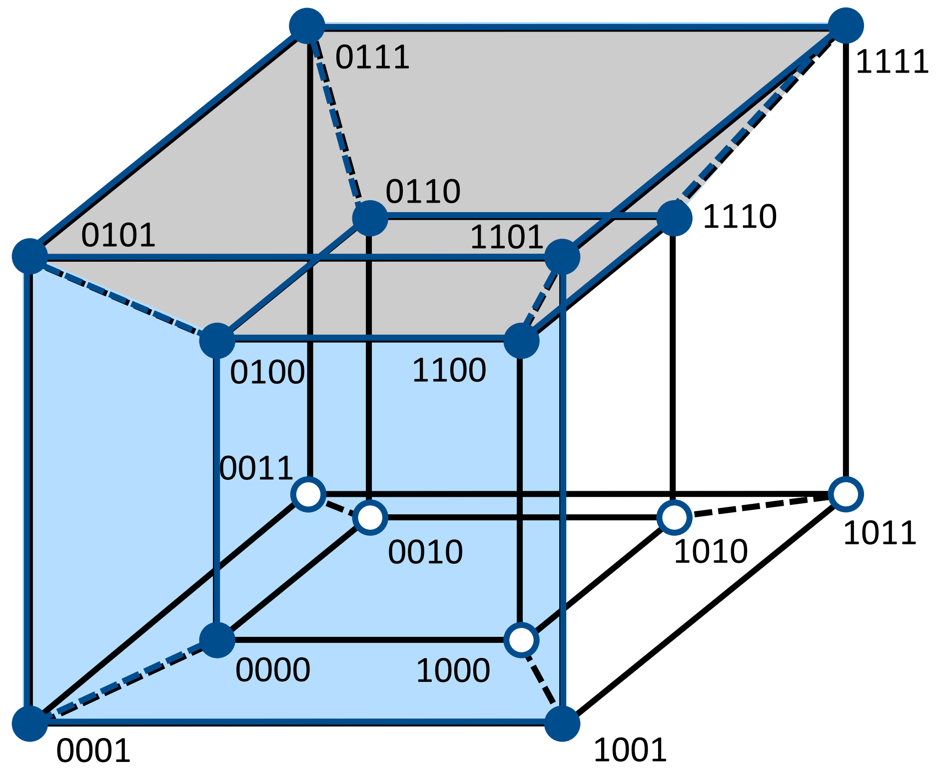
Definition (Primimplikant):
Sei $f \in \mathcal{B}_{n,1}$ eine boolesche Funktion. Ein maximaler Implikant q von f, das heißt, es gibt keinen Implikanten s $(s \neq q)$ von f mit $\psi(q) \leq \psi(s)$, heißt Primimplikant.

Veranschaulichung durch n-dimensionalen Würfel:
Ein Primimplikant von f ist ein maximaler Teilwürfel, der nur markierte Knoten enthält.

Implikanten und Primimplikanten am Würfel

Implikanten sind

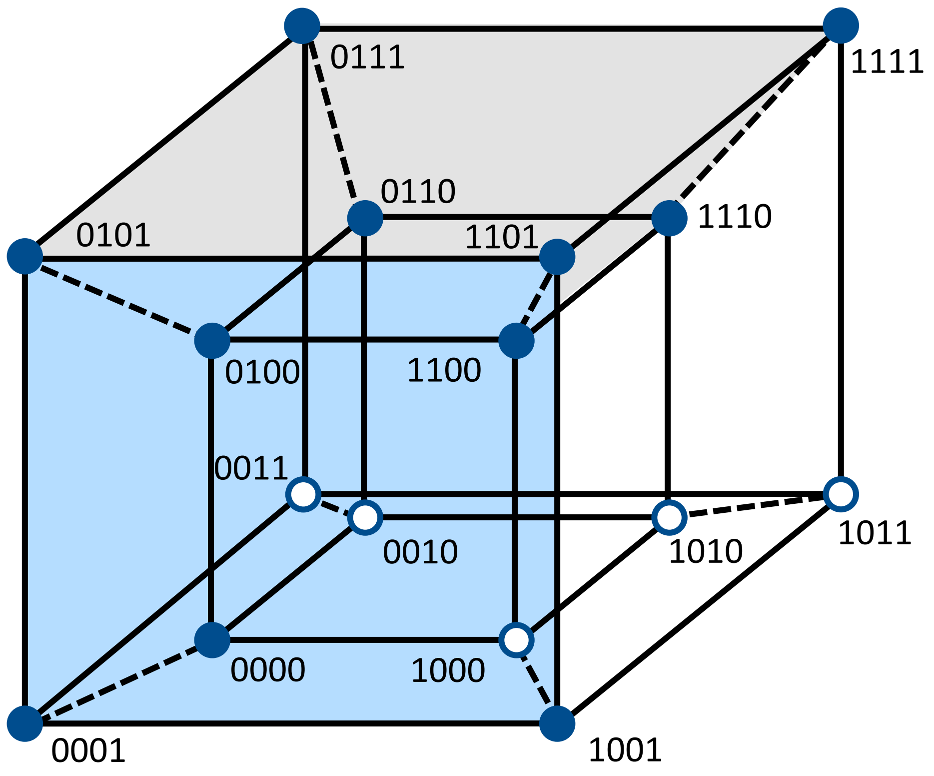
- Alle markierten Knoten
- Alle Kanten, deren Ecken alle markiert sind
- Alle Flächen, deren Ecken alle markiert sind
- Alle drei-dimensionalen Würfel, deren Ecken alle markiert sind



Allgemein gilt:
Implikanten sind die Teilwürfel, deren Ecken alle markiert sind.

Implikanten und Primimplikanten am Würfel (2)

- Drei Primimplikanten, welche die Funktion überdecken
  - x_2
  - $\overline{x_1}\ \overline{x_3}$
  - $\overline{x_3}\ x_4$



Polynome und Implikanten einer Funktion f

Lemma:
Die Monome eines Polynoms p von f sind Implikanten von f.

Beweis

Sei $f \in B_n$ eine Boolesche Funktion. Sei p ein Polynom, das f beschreibt ($\psi(p) = f$), und m ein Monom aus p.

Ist m nun kein Implikant von f, so gilt $\psi(m) \leq f$ nicht, d.h. es gibt eine Belegung $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{B}^n$ der Variablen $(x_1, \dots, x_n)$ mit

- $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$
- $\psi(m)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1.$

Aus der zweiten Eigenschaft folgt auch $\psi(p)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$, was zu $\psi(p) = f$ einen Widerspruch darstellt.

In der Würfelinterpretation:

Das Monom m ist also ein Teilwürfel, bei dem eine Ecke nicht markiert ist, womit p kein Polynom von f sein kann.

Kostenfunktion eines Polynoms

Zur Erinnerung

- Die primären Kosten $cost_1(p)$ eines Polynomes p sind gleich der Anzahl der Monome in p.
- Die sekundären Kosten $cost_2(p)$ eines Polynomes p sind gleich der Anzahl der Literale in p plus die Anzahl der Monome in p.

Definition(Kostenfunktion):
Sei im Folgenden $\boldsymbol{cost} = (cost_1, cost_2)$ die Kostenfunktion mit der Eigenschaft, dass für zwei Polynome p und p' die Ungleichung $\boldsymbol{cost}(p) \leq \boldsymbol{cost}(p')$ genau dann gilt, wenn entweder

- $cost_1(p) < cost_1(p')$ oder
- $cost_1(p) = cost_1(p')$ und $cost_2(p) \leq cost_2(p')$

gilt.

Minimalpolynom

Definition (Minimalpolynom):
Ein Minimalpolynom p einer Booleschen Funktion f(d.h. mit $\psi(p) = f$) ist ein Polynom von f mit minimalen Kosten, d.h. mit der Eigenschaft $cost(p) \leq cost\ (p‘)$ für jedes Polynom $p‘$ von f (d.h. mit $\psi(p') = f$).

Quine's Primimplikanten-Satz

Satz (Primimplikanten [Quine]):
Jedes Minimalpolynom p einer Booleschen Funktion f besteht ausschließlich aus Primimplikanten von f.

Beweis:

Nehme an, dass p einen nicht primen Implikanten m von f enthält.
m wird durch einen Primimplikanten m' von f überdeckt, ist also in m' enthalten.

Es gilt demnach $cost(m') < cost(m)$.
Ersetzt man in p den Implikanten m durch den Primimplikanten m‘ , so erhält man ein Polynom p‘ , das ein Polynom von f ist mit $cost(p') < cost(p)$.

Widerspruch dazu, dass *p* ein Minimalpolynom ist!

Berechnung von Implikanten

Lemma:
Ist m ein Implikant von f, so sind auch mx und $m\overline{x}$ für jede Variable x, die in m weder als positives noch als negatives Literal vorkommt, Implikanten.

Beweis:
$m \cdot x$ und $m \cdot \overline{x}$ sind Teilwürfel des Würfels m. Sind also alle Ecken von m markiert, so auch alle Ecken von $m \cdot x$ und $m \cdot \overline{x}$.

Lemma:
Sind mx und $m\overline{x}$ Implikanten von f, so auch m.

Beweis:

$$f \geq \psi\,(m \cdot x) + \psi(m \cdot \overline{x}) = \psi(m) \cdot \psi(x) + \psi(m) \cdot \psi(\overline{x}) = \psi(m) \cdot \big(\psi(x) + \psi(\overline{x})\big) = \psi(m)$$

Charakterisierung von Implikanten

Satz (Charakterisierung von Implikanten):
Ein Monom m ist genau dann ein Implikant von f, wenn entweder
- m ein Minterm von f ist oder
- mx und $m\overline{x}$ Implikanten von f sind für eine Variable x, die nicht in m vorkommt.

Es gilt also: $m \in \ Implikant\ (f) \Leftrightarrow \ \left(m \in \ Minterm(f) \vee \{mx, m\overline{x}\} \subset Implikant(f)\right)$

Beweis:

Folgt aus den beiden vorherigen Lemmata.