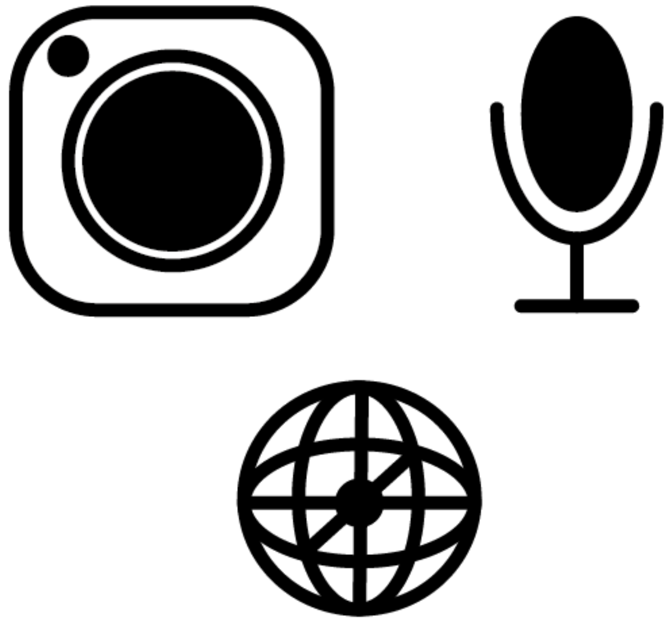

Sensordatenverarbeitung

BAYES-FILTER (13B)

(ab 20.1.25)

Mehrere Messungen

- Z besteht aus mehreren Messungen Z_i hintereinander. $Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$
- Mehrere Sensoren, und / oder mehrere Zeitpunkte
- Messung sind natürlich nicht unabhängig, weil die Wahrheit sie ja gemeinsam beeinflusst.
- Aber sie sind unabhängig gegeben die Wahrheit.
  - d.h. die Messfehler sind unabhängig
  - pragmatische Annahme, stimmt nur bedingt
  - Kausalität von $X \rightarrow Z_i$ geht unabhängig für alle i
  - größter Vorteil, P(Z=z|X=x) auszurechnen

$$P(Z = z | X = x) = \prod_{i=1}^{n} P(Z_i = z_i | X = x)$$

Mehrere Messungen

$$P(X = x|Z = z) \propto \prod_{i=1}^{n} P(Z_i = z_i|X = x)\, P(X = x)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahrheit x ist,
gegeben, dass wir gemessen haben,
was wir gemessen haben,
ist proportional zum Produkt
der Wahrscheinlichkeiten im i-ten Sensor
das zu messen, was wir gemessen haben,
wenn die Wahrheit x wäre,
mal der Wahrscheinlichkeit,
dass die Wahrheit (a-priori) x ist.

Bayes-Schätzung

$$\hat{x} = \arg\max_{x} P(X = x | Z = z)$$

$$= \arg\max_{x} \prod_{i=1}^{n} P(Z_i = z_i | X = x)\, P(X = x)$$

- Sensordatenverarbeitung (Sensorfusion) als Optimierungsproblem
- Benötigt Modelle für
  - a-priori Verteilung (oft uniform)
  - Wie wahrscheinlich ist es Z_i=z_i zu messen, wenn die Wahrheit x wäre?
  - meist Formel, was gemessen werden soll + Verteilung für den Messfehler + konkrete Zahl für Genauigkeit
- Verwirklicht probabilistischen Ansatz aus VL SdV-Paradigma
  - wenn Optimierung über alle Sensoren und Messungen durchgeführt wird

Beispiel Bayes-Schätzung

- Bei einem Glückspiel würfeln wir im Becher verdecken und sollen tippen, ob es eine 6 wird.
- Wir haben einen hochgradig illegalen Sensor unter dem Tisch mit nebenstehender Konfusionsmatrix:
- Der Sensor hat einen Wurf 4 mal gemessen und zwar
  - positiv, negativ, positiv, positiv.
- Modelliere nach der Bayes-Methode und berechne die Bayes Schätzung!

	sechs	n. sechs
Sensor positiv	2/3	1/3
Sensor negativ	1/3	2/3

$$\hat{x} = \arg\max_{x} \prod_{i=1}^{n} P(Z_i = z_i | X = x)\, P(X = x)$$

Beispiel Bayes-Schätzung

- $X \in \{\text{sechs}, \text{n. sechs}\}$
- $Z = (Z_1, \dots, Z_n), n = 4, Z_i \in \{\text{pos}, \text{neg}\}$
- Maximierung über x
  - x=sechs: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{486}$
  - x=n. sechs: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{486}$
  - → x^=n. sechs

	x= sechs	x= n. sechs
P(X=x)	1/6	5/6

Z=(positiv, negativ, positiv, positiv)

$$\hat{x} = \arg\max_x \prod_{i=1}^{n} P(Z_i = z_i | X = x)\, P(X = x)$$

P(Z=z |X=x)	x= sechs	x= n. sechs
z=pos	2/3	1/3
z=neg	1/3	2/3

Bayes-Filter

- Häufige Situation: Wahrheit ändert sich über die Zeit (Zustand)
  - Bsp. Position eines Fahrzeugs
- $X = (X_1, \dots, X_T)$, X_t ist Zustand zum Zeitpunkt t=1…T
- Messung Z_t
  - hängt nur von Zustand X_t ab
  - Bsp. GPS, Thermometer
  - $P(Z_t = z_t | X_t = x_t, \dots) = P(Z_t = z_t | X_t = x_t)$
  - Markov-Annahme 1
- Meist zusätzlich Messung U_t bzgl. Zustandsübergang t-1→t
  - hängt von Zustand X_t und vorherigem X_{t-1} ab
  - Bsp.: Raddrehsensoren, Inertialsensor
  - $P(U_t = u_t | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \dots) = P(U_t = u_t | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1})$
  - Markov-Annahme 2
- $Z = (Z_1, U_1, Z_2, U_2, \dots, Z_T, U_T)$

Bayes-Filter

- Äquivalent: Modell, wie sich der Zustand verändert
  - neuer Zustand hängt nur vom alten und Zustandsübergangsmessung ab
  - $P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t, \ldots) = P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t,)$
  - geht auch ohne U_t ($U_t = ()$)
  - bsp. physikalische Gesetze
- Bayes-Filter schätzt inkrementell den aktuellen Zustand aus den vergangenen Messungen
  - $\hat{x}_t = \arg\max_x P(X_t = x | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$
  - Der wahrscheinlichste *momentane* Zustand gegeben, dass wir gemessen haben, was wir *bisher* gemessen haben.
  - als mitlaufende Verarbeitung
  - jeden Zeitschritt Eingabe Z_t und U_t und Ausgabe $\hat{x}_t$

Bayes-Filter

- Indem es die Verteilung des aktuellen Zustandes einen Schritt "weiterrechnet"

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$\propto \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

Bayes-Filter

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$\propto \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines momentanen Zustandes x_t, gegeben, was wir bisher gemessen haben, ist

- die Wahrscheinlichkeit für den alten Zustand gegeben die damaligen Messungen,
- mal der Wahrscheinlichkeit für den neuen Zustand gegeben den alten und die Zustandsübergangsmessung
- mal der Wahrscheinlichkeit für die neue Messung gegeben den neuen Zustand,
- und das für alle alten Zustände zusammengerechnet.

Bayes-Filter

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$\propto \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines momentanen Zustandes x_t, gegeben, was wir bisher gemessen haben, ist

- die Wahrscheinlichkeit für den alten Zustand gegeben die damaligen Messungen,
- mal der Wahrscheinlichkeit für den neuen Zustand gegeben den alten und die Zustandsübergangsmessung
- mal der Wahrscheinlichkeit für die neue Messung gegeben den neuen Zustand,
- und das für alle alten Zustände zusammengerechnet.

Bayes-Filter

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$\propto \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines momentanen Zustandes x_t, gegeben, was wir bisher gemessen haben, ist

- die Wahrscheinlichkeit für den alten Zustand gegeben die damaligen Messungen,
- mal der Wahrscheinlichkeit für den neuen Zustand gegeben den alten und die Zustandsübergangsmessung
- mal der Wahrscheinlichkeit für die neue Messung gegeben den neuen Zustand,
- und das für alle alten Zustände zusammengerechnet.

Bayes-Filter

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$\propto \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines momentanen Zustandes x_t, gegeben, was wir bisher gemessen haben, ist

- die Wahrscheinlichkeit für den alten Zustand gegeben die damaligen Messungen,
- mal der Wahrscheinlichkeit für den neuen Zustand gegeben den alten und die Zustandsübergangsmessung
- mal der Wahrscheinlichkeit für die neue Messung gegeben den neuen Zustand,
- und das für alle alten Zustände zusammengerechnet.

Bayes-Filter

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$\propto \sum_{x_{t-1}} \begin{array}{c} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines momentanen Zustandes x_t, gegeben, was wir bisher gemessen haben, ist

- die Wahrscheinlichkeit für den alten Zustand gegeben die damaligen Messungen,
- mal der Wahrscheinlichkeit für den neuen Zustand gegeben den alten und die Zustandsübergangsmessung
- mal der Wahrscheinlichkeit für die neue Messung gegeben den neuen Zustand,
- und das für alle alten Zustände zusammengerechnet.

Bayes-Filter

- Letztliche, alle Messungen miteinander malgenommen, wie beim Bayes-Schätzer, aber
  - das Schritt für Schritt gemacht
  - jeweils die alten Zustände aufsummiert

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$
$$\propto \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

Beispiel Bayes-Filter

- Bei einem Glückspiel würfeln wir im Becher verdecken und sollen tippen, ob es eine 6 wird.
- Wir haben einen hochgradig illegalen Sensor unter dem Tisch mit nebenstehender Konfusionsmatrix:
- Der Sensor hat einen Wurf 4 mal gemessen und zwar
  - positiv, negativ, positiv, positiv.
- Modelliere als Bayes-Filter und berechne die Schätzungen!

	sechs	n. sechs
Sensor positiv	2/3	1/3
Sensor negativ	1/3	2/3

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$
$$\propto \sum_{x_{t-1}} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1})$$

Bayes-Beispiel

- $X \in \{\text{sechs}, \text{n. sechs}\}$
- $T = 4, Z_t \in \{\text{pos}, \text{neg}\}$
- $U_t = ()$

$P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1})$

	sechs	n. sechs
sechs	1	0
n. sechs	0	1

$P(Z_t = z_t \mid X_t = x_t)$

	sechs	n. sechs
Sensor positiv	2/3	1/3
Sensor negativ	1/3	2/3

Z=(positiv, negativ, positiv, positiv)

$$P(X_t = x_t \mid Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$= \sum_{x_{t-1}} P(Z_t = z_t \mid X_t = x_t) \cdot P(X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot P(X_{t-1} = x_{t-1} \mid Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1})$$

$P(X_0=x_0)$
1/6
5/6

Terme	
2/18	0
0	5/18

$P(X_1=x_1)$
2/18
5/18

Terme	
2/54	0
0	10/54

$P(X_t=x_t \mid x_{t-1}=x_{t-1})$	sechs	n. sechs
sechs	1	0
n. sechs	0	1

$P(X_2=x_2)$
2/54
10/54

Terme	
4/162	0
0	10/162

$P(X_3=x_3)$
4/162
10/162

Terme	
8/486	0
0	10/486

$P(X_4=x_4)$
8/486
10/486

	sechs	n. sechs
Sensor positiv	2/3	1/3
Sensor negativ	1/3	2/3

Z=(positiv, negativ, positiv, positiv)

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t}) = \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

Zusammenfassung

$$\hat{x} = \arg\max_x \prod_{i=1}^{n} P(Z_i = z_i | X = x)\, P(X = x)$$

$$\hat{x}_t = \arg\max_x P(X_t = x | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$

$$P(X_t = x_t | Z_{1..t} = z_{1..t}, U_{1..t} = u_{1..t})$$
$$= \sum_{x_{t-1}} \begin{matrix} P(Z_t = z_t | X_t = x_t) \cdot \\ P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, U_t = u_t) \cdot \\ P(X_{t-1} = x_{t-1} | Z_{1..t-1} = z_{1..t-1}, U_{1..t-1} = u_{1..t-1}) \end{matrix}$$

- Benötigt Modelle für
  - a-priori Verteilung (oft uniform)
  - Modell für Z_i bzw. Z_t
  - meist Formel, was gemessen werden soll + Verteilung für den Messfehler + konkrete Zahl für Genauigkeit
  - ggf. Modell für die Zustandsübergangsmessung U_t