Mat3 Blatt 9

Gruppe: 7
Maarten Behn, Niklas Borchers, Emre Kilinc

33. Berechnung von Kennzahlen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

> Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X , gegeben durch
>
> $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -2, \\ \frac{1}{4} & \text{für } -2 \leq x < \frac{-1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{-1}{2} \leq x < \frac{3}{7}, \\ \frac{4}{5} & \text{für } \frac{3}{7} \leq x < \frac{8}{11}, \\ 1 & \text{für } \frac{8}{11} \leq x. \end{cases}$$
>
> a) Berechnen Sie die Schiefe der Zufallsvariable X.

Man kann die Formal aus der Vorlesungen:

$$m_3\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \sigma^{-3} \cdot \mu_3(X)$$

für die Schiefe S umstellen zu:

$$S = \frac{\mathbb{E}(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\forall x} x f(x) \\ &= \left(-2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{8}{11} \cdot \frac{1}{5}\right) \\ &\approx -0.350974 =: \mu \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= E((X-\mu)^2) \\
&= \sum_{\forall x} (x-\mu)^2 \cdot f(x) \\
&= \left(0.492730 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(0.030795 \cdot \frac{1}{4}\right) \\
&+ \left(0.022625 \cdot \frac{3}{10}\right) + \left(0.065154 \cdot \frac{1}{5}\right) \\
&\approx 0.203630
\end{aligned}
$$

Das ist nicht die Varianz!

$$
\sigma = \sqrt{0.203630} \approx 0.451254
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_3 &= E((X-\mu)^3) \\
&= \sum_{\forall x} (x-\mu)^3 \cdot f(x) \\
&= \left(0.345871 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(0.0054042 \cdot \frac{1}{4}\right) \\
&+ \left(-0.003402 \cdot \frac{3}{10}\right) + \left(-0.016630 \cdot \frac{1}{5}\right) \\
&\approx 0.083472
\end{aligned}
$$

Ist nicht das 3. zentrierte Moment.

$$
S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0.083472}{0.451254^3} = 0.908401
$$

Falsch. 0,5/2

> b) Berechnen Sie die Wölbung (Kurtosis) der Standardnormalverteilung.

Für die Standardnormalverteilung

$\mu = 0$

$\sigma = 1$

Warum? Beweis oder Verweis auf die Vorlesung fehlt!

Der 4. zentrale Moment $\mu_4(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^4] = 3$

$$
\text{Kurtosis} = \sigma^{-4} \cdot \mu_4(X) = 1^{-4} \cdot 3 = 3
$$

0/2

34. Chebyshev'sche Ungleichung

> Chebyshev'sche Ungleichung.
> Angenommen, auf zwei Gefäße A und B mit je einem halben Liter Fassungsvermögen werden $0,26 \cdot 1023$ Gas-Moleküle so (zufällig) verteilt, dass jedes Molekül unabhängig von den anderen mit der

> Wahrscheinlichkeit $1/2$ in A bzw. B gelangt. Schätzen Sie vermittels der Chebyshev'schen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass in eines der beiden Gefäße mindestens $0,13 \cdot 10^{23} \cdot (1 + 10^{-8})$ Moleküle gelangen.

Wenn X die Anzahl der Moleküle, die in Gefäß A gelangen und jedes Molekül mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ in A geht, dann

$$X \sim \mathrm{Binom}(n = 0{,}26 \cdot 10^{23},\ p = 1/2)$$
$$\mathbb{E}[X] = np = 0{,}13 \cdot 10^{23}$$
$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 0{,}13 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}065 \cdot 10^{23}$$

Wenn wir dann in die Schranke der Chebyshev'sche Ungleichung reinpacken

$$\varepsilon = \mathbb{E}[X] \cdot 10^{-8} = 0{,}13 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-8} = 0{,}13 \cdot 10^{15}$$

dann in der Ungleichung

Warum schätzt dies die gesuchte W'keit ab?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 0{,}13 \cdot 10^{15}\right) &\leq \frac{0{,}065 \cdot 10^{23}}{(0{,}13 \cdot 10^{15})^2} \\ &= \frac{0{,}065 \cdot 10^{23}}{0{,}0169 \cdot 10^{30}} \\ &= \frac{0{,}065}{0{,}0169} \cdot 10^{-7} \\ &\approx 3{,}85 \cdot 10^{-7}\end{aligned}$$

3/4

35. Parameter-Fit für die geometrische Verteilung.

> Im Rahmen industrieller Fertigungsprozesse interessiert man sich für Aspekte der Qualitätskontrolle.
> Angenommen, nach 50 intakten Bauteilen tritt das erste Mal ein hergestelltes Bauteil auf, welches sich als Ausschuss erweist, also

> unbrauchbar ist.
> Bestimmen Sie unter der Annahme, dass dieses Experiment mit einem Bernoulli'schen Versuchsschema mit (prinzipiell) beliebig vielen Kontrollvorgängen modelliert wird, denjenigen Parameterwert p (hier ist p als der mittlere Ausschussanteil der Produktionsanlage zu interpretieren), unter dem die Wahrscheinlichkeit für das geschilderte Ereignis maximal ist.

Dieses Experiment lässt sich durch eine geometrische Zufallsvariable X beschreiben, die die Anzahl der Erfolge (intakte Bauteile) bis zum ersten Fehler zählt.

- X ist die Anzahl intakter Bauteile vor dem ersten Ausschuss.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Fehler nach genau k intakten Bauteilen auftritt, ist

$$P(X=k)=(1-p)^k\cdot p \quad k=0,1,2,\dots$$

in dem Beispiel ist $k=50$ (Der Fehler taucht im 51 Bauteil auf)

Maximierung von $L(p)$

$$L(p)=P(X=50)=p(1-p)^{50}, \quad p\in(0,1).$$

$$\begin{aligned} L'(p) &= (1-p)^{50}-p\cdot 50(1-p)^{49} \\ &= (1-p)^{49}\big((1-p)-50p\big) \\ &= (1-p)^{49}(1-51p) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L''(p) &= \frac{d}{dp}\left[(1-p)^{49}(1-51p)\right] \\
&= \frac{d}{dp}(1-p)^{49} \cdot (1-51p) + (1-p)^{49} \cdot \frac{d}{dp}(1-51p) \\
&= -49(1-p)^{48} \cdot (-1) \cdot (1-51p) + (1-p)^{49} \cdot (-51) \\
&= -49(1-p)^{48}(1-51p) - 51(1-p)^{49} \\
&= -(1-p)^{48}\left[49(1-51p) + 51(1-p)\right] \\
&= -(1-p)^{48}\left[49 - 2499p + 51 - 51p\right] \\
&= -(1-p)^{48}\left[100 - 2550p\right]
\end{aligned}
$$

Nullstellen der Ableitung

- $(1-p)^{49} = 0$ bei $p = 1$ (nicht interessant, da $p \in (0,1)$)
- $1 - 51p = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{51} = p \approx 0{,}0196$

Ist es ein Hochpunkt

$L''(p) < 0$, also is es ein Maximum.

4/4

Antwort

Der mittlere Ausschussanteil der Produktionsanlage, unter dem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Ausschuss genau beim 51. Bauteil auftritt, maximal ist, beträgt etwa $1{,}96\%$.

36. Multiple Select-Aufgabe

> Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P) definiert ist und für die $E[X^4] < \infty$ gilt.
> Betrachten Sie unter diesen Voraussetzungen die folgenden Aussagen.

Aus der Vorlesung

$$\text{Schiefe} = m_3\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \sigma^{-3}\cdot\mu_3(X) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3}$$

$$\text{Wölbung} = m_4\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \sigma^{-4}\cdot\mu_4(X)\frac{\mu_4(X)}{\sigma^4}$$

> a) Falls X symmetrisch um $E[X]$ verteilt ist, so ist die Schiefe von X gleich Null.

Wenn X symmetrisch um den Erwartungswert μ verteilt ist, dann gilt: Für jede positive Abweichung $X-\mu=a$ gibt es eine gleich wahrscheinliche negative Abweichung $X-\mu=-a$.

Da die dritte Potenz eine ungerade Funktion ist, heben sich die positiven und negativen Beiträge im Erwartungswert gegenseitig auf:

$$\mu_3(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^3] = 0.$$

daher

$$\text{Schiefe} = \sigma^{-3}\cdot 0 = 0.$$

1/1

> b) Die Schiefe von X kann nicht größer als die Wölbung (Kurtosis) von X sein.

Nein:

Es wird behauptet dass:

$$\gamma_1 \leq \gamma_2$$

Gegenbeispiel:

x	$P(X=x)$
-1	0.1

x	$P(X = x)$
0	0.1
1	0.8

Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mu &= \mathbb{E}[X] \\ &= (-1)(0.1) + 0(0.1) + 1(0.8) \\ &= -0.1 + 0 + 0.8 \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}[(X-\mu)^2] \\ &= (-1-0.7)^2 \cdot 0.1 + (0-0.7)^2 \cdot 0.1 \\ &+ (1-0.7)^2 \cdot 0.8 \\ &= 0.81 \end{aligned}$$

Schiefe:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \mathbb{E}[(X-\mu)^3] \\ &= (-1-0.7)^3 \cdot 0.1 + (0-0.7)^3 \cdot 0.1 + (1-0.7)^{3 \cdot 0.8} \\ &= -0.891 \end{aligned}$$

$$\text{Schiefe} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \approx \frac{-0.891}{(0.9)^3} \approx -1.22$$

Kurtosis:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \mathbb{E}[(X-\mu)^4] \\ &= (-1-0.7)^4 \cdot 0.1 + (0-0.7)^4 \cdot 0.1 + (1-0.7)^4 \cdot 0.8 \\ &= 1.219 \end{aligned}$$

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \approx \frac{1.219}{(0.9)^4} \approx 1.87$$

Das ist kein Gegenbeispiel!

Die Aussage ist sogar wahr!

0/1

> c) Die Schiefe von X kann nicht kleiner als die Wölbung (Kurtosis) von X sein.

Nein:

Es wird behauptet dass:

$$\gamma_1 \geq \gamma_2$$

Gegenbeispiel

Eine symmetrische Verteilung, z.B. eine Standardnormalverteilung $N(0,1)$:

- $\mu = 0$,
- $\sigma^2 = 1$,
- Schiefe $\gamma_1 = 0$ (symmetrisch),
- Wölbung $\gamma_2 = 3$ (Standardnormalverteilung hat Kurtosis 3).

Hier gilt:
$\gamma_1 = 0 < 3 = \gamma_2$

1/1

> d) Der Korrelationskoeffizient von X mit sich selbst (also $\rho(X,X)$) ist gleich Eins.

Ja:
Der Korrelationskoeffizient $\rho(X,X)$ misst die lineare Abhängigkeit von X mit sich selbst. Formal gilt:

$$\rho(X,X) = \frac{\mathrm{Cov}(X,X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(X)}} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)} = 1,$$

vorausgesetzt, dass $\mathrm{Var}(X) > 0$

1/1

10,5/16